ANGLES ET POLYGONES REGULIERS

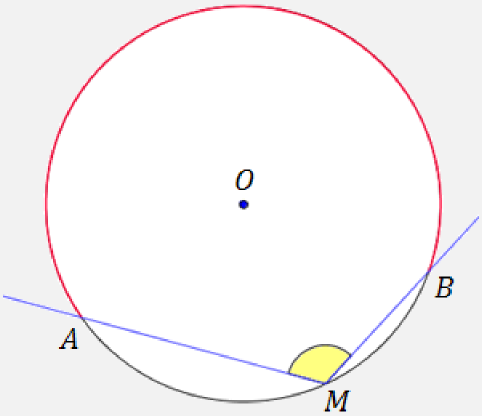
I. Angles :

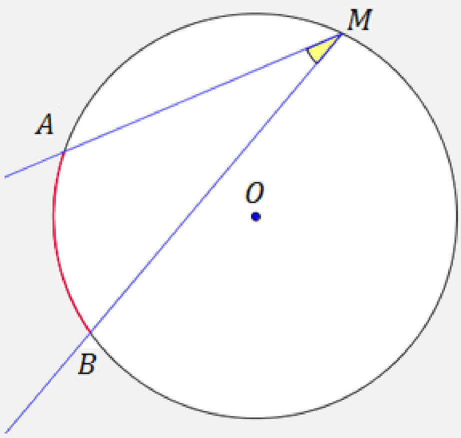
1) Angle inscrit dans un cercle

Définition1 : Un angle ayant pour sommet un point d'une d'un cercle et pour côtés deux cordes du cercle est appelé angle inscrit dans le cercle.

Exemple :

Soient A, M et B trois points d'un cercle de centre O. Sur chacune des figures suivantes, $\widehat{AMB}$ est un angle inscrit dans un cercle.





Vocabulaire : On dit que l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ intercepte l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ *(représenté en rouge sur les figures précédentes).*

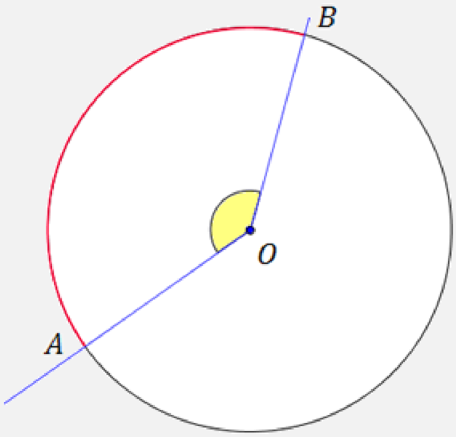
2) Angle au centre

Définition2 : Un angle ayant pour sommet le centre d'un cercle est appelé angle au centre

Exemple :

Soit un cercle de centre O, soient A et B deux points du cercle.

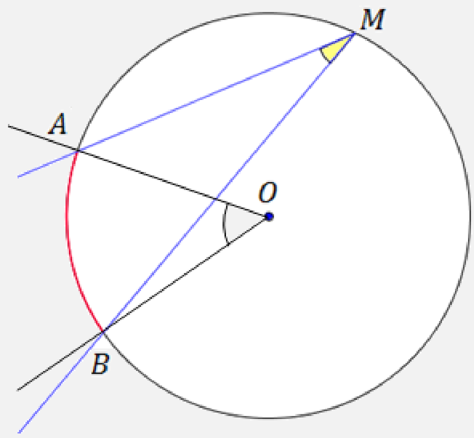
$\widehat{AOB}$ est un angle au centre de ce cercle. *(une fois encore ici, il intercepte l'arc* $\overset{\frown}{AB}$ *représenté en rouge sur la figure)*



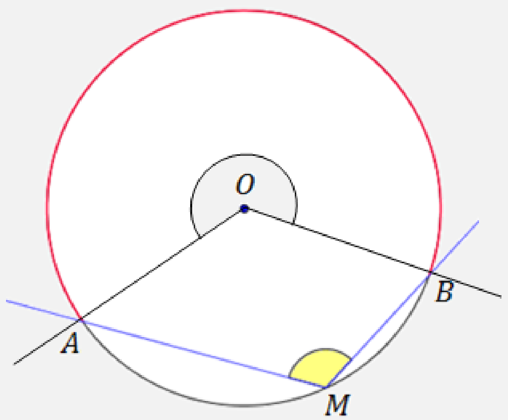
3) Angle au centre associé à un angle inscrit

Définition3 : Si, dans un cercle, un angle au centre intercepte le même arc qu'un angle inscrit alors on dit qu'il s'agit de l'angle au centre associé à cet angle inscrit.

Exemple :



Ici, l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ et l'angle au centre saillant $\widehat{AOB}$ interceptent tous les deux l'arc rouge.



Ici, l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ et l'angle au centre rentrant $\widehat{AOB}$ interceptent tous les deux l'arc rouge.

4) Propriétés :

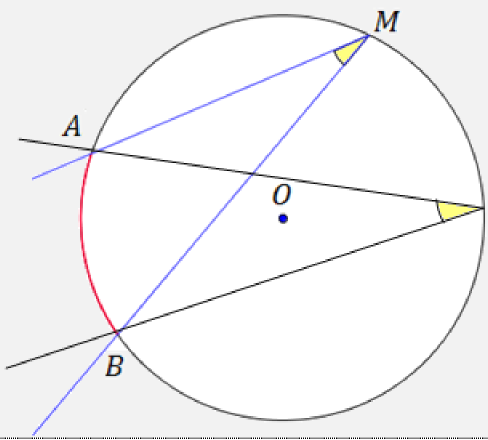
Activité 1 : Activité de conjecture des propriétés suivantes à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Propriété1 : Si, dans un cercle, un angle inscrit et un angle au centre interceptent le même arc, alors la mesure de l'angle inscrit est égale à la moitié de celle de l'angle au centre.
C'est-à-dire, pour le premier exemple $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$ et pour le second $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$

Activité 2 : Preuve guidée de la propriété 1.

Propriété2 : Si deux angles inscrits dans un cercle interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure.

Exemple :



Sur la figure ci-contre,

- $\widehat{AMB}$ est un angle inscrit
- $\widehat{ANB}$ est un angle inscrit
- $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ interceptent le même arc

Donc, d'après la propriété précédente, on a :

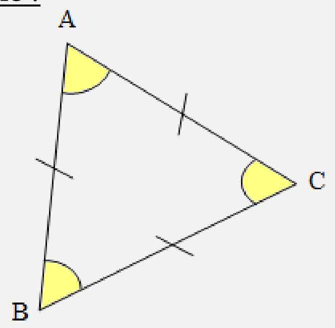
$$\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$$

II. Polygones réguliers

1) Définition :

Définition4 : Un polygone régulier est un polygone dont tous les cotés ont la même longueur et tous les angles sont égaux.

Exemple :



Un triangle équilatéral a :

- Ses trois côtés de même longueur
- Ses trois angles de même mesure

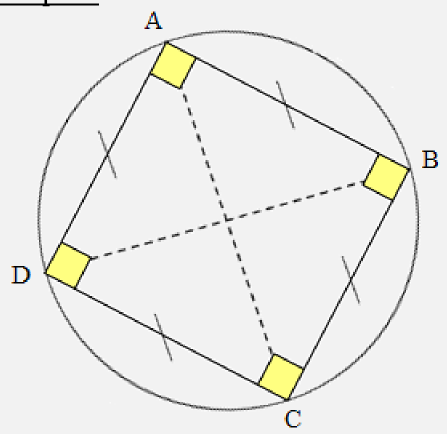
Donc, un triangle équilatéral est un polygone régulier à 3 côtés.

2) Propriétés :

Activité : Introduction aux propriétés suivantes

Propriété3 : Si un polygone est régulier, tous ses sommets appartiennent à un même cercle *(on dit qu'il est inscriptible dans un cercle)*
Le centre de ce cercle est appelé centre du polygone régulier.

Exemple :



Un carré est un polygone régulier par définition.

Or, le point d'intersection de ses diagonales est appelé centre du carré.

Il s'agit du centre du cercle passant par chacun des sommets du carré.

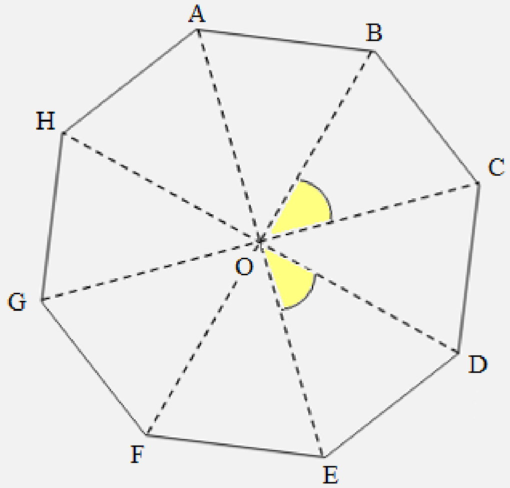
Ainsi le carré est bien inscriptible dans un cercle.

Propriété 4: Si un polygone est inscriptible dans un cercle et ses côtés ont la même longueur, alors c'est un polygone régulier.

Définition5 : On considère un polygone régulier à n côtés de centre O.
Si l'on désigne par A et B deux sommets consécutifs de ce polygone alors l'angle $\widehat{AOB}$ est un angle au centre du polygone.

Propriété5 : Si un polygone régulier a n côtés, alors tous ses angles au centre ont la même mesure. Ils sont égaux à $\dfrac{360}{n}$ degrés.

Exemple :



On suppose que l'octogone ci-contre est régulier *(C'est-à-dire que tous ses côtés ont la même longueur et tous ses angles la même mesure)*

Un octogone régulier a ses angles au centre égaux à $\frac{360}{8} = 45°$ *(par propriété précédente)*

Donc, en particulier, $\widehat{BOC} = \widehat{EOD} = 45°$